INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

Session de 1988 MATHÉMATIQUES

Option Economique
Option Technologique
Durée 4 heures - Coefficient : 3

EXERCICE 1 *(5 points)*

Cent chefs de famille d'un même quartier ont répondu à un sondage concernant à la fois le revenu mensuel de la famille (X) et le nombre de véhicules automobiles possédés (Y). Les différentes réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Y \ X	[5,7 [	[7,10 [	[10,15 [	[15,25 [	[25,40]
0	5	4	4	0	0
1	9	12	15	3	5
2	1	8	10	12	8
3	0	1	0	1	2

(Les revenus étant exprimés en milliers de Francs, ce tableau signifie donc, par exemple, que 12 personnes gagnant au moins 7 000 F par mois, mais moins de 10 000 F, déclarent posséder 1 voiture).

1°) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) et le coefficient de corrélation entre X et Y.

2°) Déterminer l'indice de concentration (aussi appelé indice de Gini) de la statistique X, et la médiale de X.

3°) Déterminer le salaire moyen d'un chef de famille possédant au moins un véhicule automobile.

EXERCICE 2 *(5 points)*

Soit n un nombre entier naturel non nul. Une urne contient initialement n boules noires et 2 n boules blanches. On tire des boules au hasard de cette urne, une à une et sans remise, jusqu'à ce que l'on obtienne la dernière boule noire. On note X_n le nombre aléatoire de tirages ainsi effectués.

1°) Dans les deux cas : n = 1, puis : n = 2, déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

2°) Dans le cas général, déterminer les valeurs que peut prendre X_n, puis la loi de X_n.

3°) i) Calculer les probabilités des événements : " $X_1 \leq 2$ " , " $X_2 \leq 4$ "

ii) Dans le cas général, calculer la probabilité de l'événement : " $X_n \leq 2n$ ".

EXERCICE 3 *(5 points)*

1°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x} + \text{Log}\left(\frac{x}{1+x}\right)$, où « Log » désigne la fonction *logarithme népérien.*

i) Quel est le domaine de définition de f ?

ii) Etudier les variations de f.

iii) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (l'unité sera prise égale à 3 cm).

2°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x \text{ Log}\left(\frac{x}{1+x}\right)$

i) Quel est le domaine de définition de g ? peut-on prolonger g par continuité ? Cet éventuel prolongement est-il dérivable ?

ii) Construire la représentation graphique Γ de g dans le même repère que précédemment.

iii) Calculer l'aire de la surface limitée par Γ, la droite horizontale d'ordonnée − 1 et les droites verticales d'abscisses respectives 1 et α, avec $\alpha > 1$. Cette aire a-t-elle une limite lorsque α tend vers l'infini ?

EXERCICE 4 *(5 points)*

1°) Soit f une fonction définie et continue sur le segment [0,1].
Montrer que, parmi les primitives de f, il en existe exactement une, notée F, telle que :

$$\int_0^1 F(x)\,dx = 0$$

Déterminer F pour f définie par : $f(x) = e^x$

2°) On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomes par les conditions suivantes :

a) $P_0 : x \longmapsto 1$

b) Pour tout entier naturel n non nul, P_n est la primitive de P_{n-1} telle que $\int_0^1 P_n(x)\,dx = 0$

i) Déterminer les fonctions P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5

ii) Pour $n \in \{1,2,3,4,5\}$, quelle relation y-a-t-il entre $P_n(1-x)$ et $P_n(x)$?

iii) Pour $n \in \{1,2,3,4,5\}$, étudier les variations de P_n sur le segment [0,1], et en déduire le nombre de solutions appartenant à [0,1] de l'équation : $P_n(x) = 0$.

iv) Peut-on généraliser les résultats obtenus en ii) et iii), pour tout entier naturel non nul n ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail